Riešenie viackriteriálnej úlohy TSP na báze STEM metódy
Solution of multicriterial TSP problem based on STEM method

Lucia Mieresová, Juraj Pekár

Abstract: The aim of this article is solution of multicriterial circular tasks. Despite the fact that this area is in publications less common than classic cases of circular tasks (one-criterial), we can certainly say that for solving real-world cases or cases from practice, when we try to get the best solution, based on various factors, than is preferable to use methods which in finding of the best solution takes into account multiple objectives.
This article is based on TSP problem. For case study, we will use 24-nodes transport network. Each of these nodes must be visited. In the real world, these nodes may represent warehouses, retail, collection points, etc. The specified case will be in contrast with the classical problem solved in terms of multicriterial optimization based on STEM method.
The first chapter is dedicated to the article introduction. The next chapter describes the classical TSP and circular tasks with multiple criteria and it also displays mathematical formulation of the connection TSP and multi-criteria method STEM. The task is solved in system GAMS, which is described in the third chapter. Specification of solved problem is defined in the fourth chapter. The final chapter presents a summary of the issues and of the article.
Kľúčové slová: Viackriteriálne úlohy, Okružné úlohy, TSP, STEM
Keywords: Multicriterial Task, Circular Task, TSP, STEM
JEL classification: C00, C6

1. Úvod

Vo všeobecnosti môžeme povedať, že riešenie viackriteriálnych problémov je veľmi aktuálna a potrebná záležitosť. S jednoduchými problémami tohto typu sa stretávame aj v bežnom živote. Náročné úlohy, napríklad práve z oblasti okružných úloh, riešia najmä firmy v sektore logistiky. Oproti jednokriteriálnemu, nám viackriteriálne rozhodovaniu môže takisto umožniť nájsť vhodné kompromisné riešenie, ktoré zohľadňuje viacero obmedzení alebo kritérií, keďže v problémoch tohto typu často krát nie je jedinečné riešenie, ktoré by mohlo optimalizovať všetky ciele súčasne. Okružné úlohy ponúkajú možnosť zohľadnenia viacerých obmedzení, ktoré možno klasifikovať podľa toho, či sa týkajú vozidiel alebo charakteru uzlov obsluhy. Každé z obmedzení zvyčajne komplikuje možnosti riešenia úlohy, ale súčasne približuje uvažované matematické modely požiadavkám praxe a tým zvyšuje ich využiteľnosť. Spomínané obmedzenia v praxi môžeme formulovať a chápať ako kritéria. Ak chceme optimalizovať nejaké obmedzenie a v danej oblasti úlohu maximalizovať alebo minimalizovať, dané obmedzenie sa automaticky stáva kritériom.

2. Klasická úloha obchodného cestujúceho (Traveling Salesman Problem – TSP)

Podstatou úlohy je nájsť optimálnu, vzdialenosťou, či časovo najkratšiu, alebo v inom zmysle najmenej nákladnú okružnú trasu (napr. Pekár a kol., 2012) na grafe $G = \{U,H\}$ (zvyčajne uvažujeme úplný graf $\overline{G} = \left\{U, \overline{H}\right\}$ s vyčíslenými najkratšími vzdialenosťami medzi každou dvojicou uzlov), ktorá spočíva v prepojení uzlov tak, že začiatočný aj koncový uzol je totožný a každý iný uzol je v okružnej ceste zahrnutý práve raz. Úlohu obchodného cestujúceho možno doplniť rôznymi dodatočnými podmienkami a tak zohľadniť reálne obmedzenia rôznych praktických úloh. Vo formulácii úlohy obchodného cestujúceho sa uvažuje len jeden obchodný cestujúci, resp. len jedno vozidlo. Predpokladá sa, že kapacita tohto vozidla je dostatočne veľká na to, aby boli splnené požiadavky všetkých uzlov. Graf $\overline{G} = \left\{U, \overline{H}\right\}$ je úplne hranovo ohodnotený graf, v ktorom každé dva rôzne uzly sú spojené hranou. Potom matica D = $\{d_{ij}\}$ reprezentuje najkratšiu vzdialenosť medzi všetkými uzlami navzájom.

Okružné úlohy s viacerými kritériami

Vo všeobecnosti sa najčastejšie uvažuje s nasledujúcimi obmedzeniami v oblasti viackriteriálnych okružných úloh:

- Ohraničenia týkajúce sa dopravných prostriedkov
- Ohraničenia týkajúce sa obslužných uzlov
- Ohraničenia týkajúce sa iných faktorov

V závislosti od skúmanej úlohy možno použiť viacero typov optimalizačných kritérií, napr. minimalizácia fixných nákladov (napr. minimalizácia počtu použitých vozidiel), minimalizácia variabilnej zložky nákladov (napr. minimalizácia celkovej najazdenej vzdialenosti alebo celkového času potrebného na prepravu napr. z dôvodu veľkosti mzdy vodiča alebo s cieľom eliminovať penále za neobslúženie uzla).

Matematická formulácia metódy STEM modifikovaná pre potreby riešenia TSP problému

Metóda STEM predstavuje „vyhľadávací“ iteračný prístup, ktorý stanovuje systém pre postupné vyhľadávanie riešenia. Metóda STEM používa pri hľadaní efektívneho riešenia metódu minimax. Táto metóda patrí medzi metódy s implicitne vyjadrenou hodnotou zámeny. STEM metóda je založená na minimalizácií vzdialenosti od ideálnej varianty s využitím Čebyševovej metriky.

Analytik vo výpočtovej fáze ponúka priebežné riešenia, ktoré predkladá rozhodovateľovi spolu s hodnotami kriteriálnych funkcií. V rozhodovacej fáze rozhodovateľ zhodnotí dosiahnuté výsledky a následne poskytne analytikovi informácie, ktoré hodnoty kriteriálnych funkcií mu vyhovujú a hodnoty ktorej účelovej funkcie je ochotný „zhoršiť“ a o akú hodnotu.

Zhoršenie hodnoty jednej z vyhovujúcich kriteriálnych funkcií je dôležitým predpokladom pre zvýšenie hodnôt nevyhovujúcich kriteriálnych funkcií.

Výpočtové kroky STEM metódy pre riešenie viackriteriálnej úlohy TSP môžu byť sumarizované nasledovne:

K1 Definujeme viackriteriálny optimalizačný problém pre riešenie okružnej úlohy

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{c} \min f_1(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \min f_2(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ij} x_{ij} \\ \min f_3(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_{ij} \\ \dots \\ \min f_k(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ij} x_{ij} \end{array} \right\} \tag{1}$$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad i \neq j \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad i \neq j \\ y_i - y_j + n x_{ij} \leq n - 1, \quad i, j = 2, 3, \dots, n \quad i \neq j \\ x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\} \tag{2}$$

a optimalizujeme každý z troch cieľov na vytvorenie pay-off tabuľky tak, ako je to ukázané v tabuľke 1.

Tab. 1: Pay-off tabuľka

	$f_1(\bar{x}^i)$	$f_2(\bar{x}^i)$	…	$f_k(\bar{x}^i)$
$\bar{x}^1$	x_1^*	x_{12}	…	x_{1k}
$\bar{x}^2$	x_{21}	x_2^*	…	x_{2k}
…	…	…	…	x_{12}
$\bar{x}^k$	x_{k1}	x_{k2}	…	x_k^*

Hodnoty na diagonále predstavujú najlepšie možné dosiahnuteľné hodnoty pre daný cieľ.

K2 V druhom kroku je nutne vyjadriť hodnoty $\prod_i$ a to nasledovne

$$\prod_i = \left\{ \begin{array}{l} \left|\frac{x_i^* - m_i}{x_i^*}\right| \; [\sum_{j=1}^{n} (b_{ij})^2\;]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ak } x_i^* > 0 \\ \left|\frac{m_i - x_i^*}{m_i}\right| [\sum_{j=1}^{n} (b_{ij})^2]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ak } x_i^* \leq 0 \end{array} \right\} \tag{3}$$

Kde m_i je najhoršia hodnota v i-tom stĺpci pay-off tabuľky, **b** vektory funkcie a číslo iterácie je t=0.

K3 $X^{(1)} = X$, $J = \emptyset$. Prvky množiny J označujú indexy tých účelových funkcií, ktoré môžu byť relaxované (zhoršené) na nasledujúcej iterácií s cieľom umožniť zvýšenie ostatných účelových funkcií. Číslo iterácie je t=1.

K4 Nech t=t+1. Vypočítajú sa minimaxové (Čebyševové) váhy $\lambda_i^{(t)}$, kde

$$\lambda_i^{(t)} = \left\{ \begin{matrix} 0 \quad \text{ak}\, i \notin J \\ \\ \frac{\Pi_i}{\sum_{j=1}^{k} \Pi_j} \quad \text{ak}\, i \in J \end{matrix} \right\} \tag{4}$$

K5 Ďalší krok predstavuje riešenie váženej minimaxovej úlohy

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad \alpha \\ &f_i + \frac{\alpha}{\lambda_\mathrm{i}} \geq f_i^* \quad , i = 1,2, \dots, k \\ &0 \leq \alpha \end{aligned} \tag{5}$$

K6 Ak všetky zložky vyhovujú rozhodovateľovi, výpočet je ukončený, inak sa pokračuje na ďalší krok **K7**.

K7 Špecifikácia hodnoty J a špecifikácia hodnoty Δj (o koľko sme ochotní zhoršiť funkciu), $j \in J$, ktoré definujú veľkosť relácie, tzn. Prípustného zhoršenia hodnoty j-tej účelovej funkcie.

K8 Vyjadrí sa nasledujúca hodnota a pokračuje sa tretím krokom tzn. **K3**.

$$x^{(t+1)} = \left\{ x \in X \middle| \begin{matrix} b^j x \geq x_j\left(x^{(t)}\right) - \Delta j\,,\; j \in J \\ b_j x \geq x_j\left(x^{(t)}\right),\; i \notin J \end{matrix} \right\} \tag{6}$$

3. Riešenie úlohy pomocou systému GAMS

Pre riešenie modelového prípadu bola využívaná softvérová podpora a na dosiahnutie výsledkov bol potrebný optimalizačný systém GAMS (General Algrebaic Modeling System), ktorý je špeciálnym programovacím jazykom vyššej úrovne, za pomoci ktorého je možné formulovať matematické modely pomocou algebraických príkazov (napr. Charmaza a kol., 1993). Prostredníctvom jazyka GAMS je dostupných približne tridsať programových systémov na riešenie optimalizačných úloh („solverov“) a tým aj väčšina algoritmov v súčasnosti používaných na tieto účely. GAMS má využitie v rôznych oblastiach ľudského pôsobenia.

Zápis kódu v programe GAMS na riešenie viackriteriálnej okružnej úlohy medzi 24 uzlami siete, metódou obchodného cestujúceho, vytvorený na základe stanoveného problému a matematického zápisu popísaného v predchádzajúcich kapitolách je opísaný nižšie.

Zápis kódu v programe GAMS

Uvedený kód algoritmu je zostavený na základe matematických modelov popísaných v predchádzajúcich kapitolách. Predstavuje kombináciu a modifikáciu úlohy TSP a viackriteriálnej metódy STEM.

```
Sets
i index uzla /1*24/
alias (i,j);
sets offdiag1(i,j)
     offdiag2(i,j);
offdiag1 (i,j)= yes;
offdiag1 (i,i)= no;
offdiag2 (i,j)= offdiag1(i,j);
offdiag2 (i,'1')= no;
offdiag2 ('1',j)= no;
table c(i,j)[2];
table e(i,j)[3];
table m(i,j)[4];
Scalar n;
n=card(i);
variables f,y;
positive variable d;
binary variable x;
equations
ohr1(j)
ohr2(i)
anti(i,j)
ohr3
ohr4
ohr5
ucel;
ucel.. f=e=d;
ohr1(j).. sum(i,x(i,j)$offdiag1(i,j))=e=1;
ohr2(i).. sum(j,x(i,j)$offdiag1(i,j))=e=1;
anti(offdiag2(i,j)).. y(i)-y(j)+n*x(i,j)=l=n-1;
ohr3.. sum((i,j),c(i,j)*x(i,j))- ... *d=l= ... ;
ohr4.. sum((i,j),e(i,j)*x(i,j))- ... *d=l= ... ;
ohr5.. sum((i,j),m(i,j)*x(i,j))- ... *d=l= ... [5];
model TSP /all/;
option optcr=0.00000001;
solve TSP using mip minimizing f;
display x.l,d.l;
```

4. Zadanie a predpoklady riešeného prípadu

Pri stanovení cieľov, na základe ktorých chceme hľadať najvhodnejšiu trasu medzi uzlami, môžeme pracovať s rôznymi preferenciami. Pre demonštrovanie riešenia viackriteriálnej okružnej úlohy na reálnom prípade budeme uvažovať s 24-timi uzlami dopravnej siete, ktoré treba navštíviť. V reálnom svete tieto uzly môžu predstavovať sklady, predajne, zberné miesta a pod. Pre zadaný prípad chceme na rozdiel oproti klasickej úlohe optimalizovať tri ciele.

[1] Matica **C** predstavuje hodnoty prvého kritéria

[2] Matica **E** predstavuje hodnoty druhého kritéria

[3] Matica **M** predstavuje hodnoty tretieho kritéria

[4] hodnoty podľa riešeného prípadu

Pre každý cieľ zadaného modelu bolo potrebné získať údaje pre maticu o veľkosti 24x24, ktorá reprezentuje hodnoty jednotlivých cieľov.

Pre modelový prípad budú vyzerať nasledovne:

Tab. 2: Matica C, Zdroj: Vlastné spracovanie

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0	47.5	71.6	27.8	107	48.8	102	81.9	72.8	112	20.1	108	136	149	151	153	183	190	218	208	180	127	128	111
2	47.5	0	67.6	22	118	60.2	69.6	85.2	84.2	81.9	33	120	148	160	163	164	194	202	229	220	191	139	140	122
3	71.6	67.6	0	62.1	41.7	43.3	32.6	17.5	67.9	31.6	53.2	70.4	115	96.9	118	119	149	157	153	164	146	89.1	124	109
4	27.8	22	62.1	0	97.8	39.8	75.8	72.9	63.8	88.1	12.6	99.4	127	140	142	144	174	181	209	199	171	118	119	102
5	107	118	41.7	97.8	0	68.3	68.8	26	93	53.9	86.5	76.5	121	54.9	104	125	132	113	115	122	152	95.5	133	115
6	48.8	60.2	43.3	39.8	68.3	0	75.1	44.3	24.8	74.1	30.5	60.4	88.2	101	103	105	135	142	150	160	132	79.1	80.3	62.7
7	102	69.6	32.6	75.8	68.8	75.1	0	49.2	99.2	14	86.2	102	146	129	150	151	181	188	185	196	178	121	156	141
8	81.9	85.2	17.5	72.9	26	44.3	49.2	0	68.4	48.4	62	53.8	98.2	82.5	101	103	133	140	138	158	130	72.5	110	92.6
9	72.8	84.2	67.9	63.8	93	24.8	99.2	68.4	0	97.7	54.2	36.2	64.1	76.5	79.3	80.4	111	118	126	136	107	54.9	56.1	38.6
10	112	81.9	31.6	88.1	53.9	74.1	14	48.4	97.7	0	91.7	101	146	113	149	150	180	171	168	179	177	120	154	140
11	20.1	33	53.2	12.6	86.5	30.5	86.2	62	54.2	91.7	0	89.2	117	129	132	133	164	171	198	189	160	108	109	91.5
12	108	120	70.4	99.4	76.5	60.4	102	53.8	36.2	101	89.2	0	46.9	42	43	51.2	73.5	81.1	105	99.1	78.2	21.1	58.6	41.3
13	136	148	115	127	121	88.2	146	98.2	64.1	146	117	46.9	0	88.9	54.4	20	85.7	93.3	138	111	59.6	30.5	21	34
14	149	160	96.9	140	54.9	101	129	82.5	76.5	113	129	42	88.9	0	48.9	93.3	76.6	58.6	49.1	66.7	99.5	63.2	101	83.4
15	151	163	118	142	104	103	150	101	79.3	149	132	43	54.4	48.9	0	50.3	36.6	44.1	85.2	62.2	55.8	27.1	65.8	48.4
16	153	164	119	144	125	105	151	103	80.4	150	133	51.2	20	93.3	50.3	0	74.5	89.4	136	107	39.7	28.9	67.5	50.2
17	183	194	149	174	132	135	181	133	111	180	164	73.5	85.7	76.6	36.6	74.5	0	18.8	81	30	35	59	97.6	80.3
18	190	202	157	181	113	142	188	140	118	171	171	81.1	93.3	58.6	44.1	89.4	18.8	0	60.7	27.5	50.2	67	106	88.3
19	218	229	153	209	115	150	185	138	126	168	198	91.1	138	49.1	85.2	136	81	60.7	0	56.4	116	112	150	132
20	208	220	164	199	122	160	196	158	136	179	189	105	111	66.7	62.2	107	30	27.5	56.4	0	64.6	84.2	123	106
21	180	191	146	171	152	132	178	130	107	177	160	78.2	59.6	99.5	55.8	39.7	35	50.2	116	64.6	0	56	94.6	77.2
22	127	139	89.1	118	95.5	79.1	121	72.5	54.9	120	108	21.1	30.5	63.2	27.1	28.9	59	67	112	84.2	56	0	42.4	25.1
23	128	140	124	119	133	80.3	156	110	56.1	154	109	58.6	21	101	65.8	67.5	97.6	106	150	123	94.6	42.4	0	21.3
24	111	122	109	102	115	62.7	141	92.6	38.6	140	91.5	41.3	34	83.4	48.4	50.2	80.3	88.3	132	106	77.2	25.1	21.3	0

Tab. 3: Matica E, Zdroj: Vlastné spracovanie

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0	47.5	80.8	27.8	107	48.8	113	81.9	72.8	112	20.1	148	136	186	151	153	183	190	233	208	180	127	128	111
2	47.5	0	92.2	22	118	60.2	69.6	93.3	84.2	81.9	33	155	148	194	163	164	194	202	246	220	191	139	140	122
3	80.8	92.2	0	72	41.7	43.3	32.6	17.5	67.9	31.6	61.5	141	133	182	144	149	177	186	231	209	175	124	124	109
4	27.8	22	72	0	97.8	39.8	104	72.9	63.8	103	12.6	137	127	179	142	144	174	181	216	199	171	118	119	102
5	107	118	41.7	97.8	0	68.3	72.8	26	93	72.3	86.5	167	157	208	172	177	207	211	228	234	200	148	150	131
6	48.8	60.2	43.3	39.8	68.3	0	75.1	44.3	24.8	74.1	30.5	96.3	88.2	144	103	105	135	142	193	160	132	79.1	80.3	62.7
7	113	69.6	32.6	104	72.8	75.1	0	49.2	99.2	14	92.7	171	164	215	175	183	212	223	265	239	208	156	156	141
8	81.9	93.3	17.5	72.9	26	44.3	49.2	0	68.4	48.4	62	141	132	184	151	148	178	187	233	210	177	125	125	107
9	72.8	84.2	67.9	63.8	93	24.8	99.2	68.4	0	97.7	54.2	70	64.1	113	79.3	80.4	111	118	164	136	107	54.9	56.1	38.6
10	112	81.9	31.6	103	72.3	74.1	14	48.4	97.7	0	91.7	171	162	212	176	178	207	219	263	239	206	153	154	140
11	20.1	33	61.5	12.6	86.5	30.5	92.7	62	54.2	91.7	0	130	117	167	132	133	164	171	215	189	160	108	109	91.5
12	148	155	141	137	167	96.3	171	141	70	171	130	0	46.9	42	49.5	51.2	73.5	81.1	91.1	105	78.2	21.1	58.6	41.3
13	136	148	133	127	157	88.2	164	132	64.1	162	117	46.9	0	88.9	54.4	20	85.7	93.3	138	111	59.6	30.5	21	34
14	186	194	182	179	208	144	215	184	113	212	167	42	88.9	0	48.9	93.3	91	73.6	49.1	66.7	99.5	63.2	101	83.4
15	151	163	144	142	172	103	175	151	79.3	176	132	49.5	54.4	48.9	0	50.3	36.6	44.1	85.2	62.2	55.8	27.1	65.8	48.4
16	153	164	149	144	177	105	183	148	80.4	178	133	51.2	20	93.3	50.3	0	74.5	89.4	142	107	39.7	28.9	67.5	50.2
17	183	194	177	174	207	135	212	178	111	207	164	73.5	85.7	91	36.6	74.5	0	18.8	81	30	35	59	97.6	80.3
18	190	202	186	181	211	142	223	187	118	219	171	81.1	93.3	73.6	44.1	89.4	18.8	0	60.7	27.5	50.2	67	106	88.3
19	233	246	231	216	228	193	265	233	164	263	215	91.1	138	49.1	85.2	142	81	60.7	0	56.4	116	112	150	132
20	208	220	209	199	234	160	239	210	136	239	189	105	111	66.7	62.2	107	30	27.5	56.4	0	64.6	84.2	123	106
21	180	191	175	171	200	132	208	177	107	206	160	78.2	59.6	99.5	55.8	39.7	35	50.2	116	64.6	0	56	94.6	77.2
22	127	139	124	118	148	79.1	156	125	54.9	153	108	21.1	30.5	63.2	27.1	28.9	59	67	112	84.2	56	0	42.4	25.1
23	128	140	124	119	150	80.3	156	125	56.1	154	109	58.6	21	101	65.8	67.5	97.6	106	150	123	94.6	42.4	0	21.3
24	111	122	109	102	131	62.7	141	107	38.6	140	91.5	41.3	34	83.4	48.4	50.2	80.3	88.3	132	106	77.2	25.1	21.3	0

Tab. 4: Matica M, Zdroj: Vlastné spracovanie

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0	37	62	24	81	44	97	63	61	93	17	99	121	129	132	129	158	167	173	177	157	111	109	100
2	37	0	71	22	95	58	72	77	75	84	31	112	135	142	145	143	170	179	189	189	171	123	121	112
3	62	71	0	62	37	42	38	21	59	34	53	70	103	83	109	106	135	146	133	152	134	72	100	92
4	24	22	62	0	77	40	76	60	57	88	14	74	107	124	128	126	153	162	172	172	154	106	103	95
5	81	95	37	77	0	58	71	23	76	59	70	69	101	54	109	104	130	117	104	123	132	80	109	90
6	44	58	42	40	58	0	76	41	24	73	35	61	83	90	94	91	119	128	144	138	120	73	70	61
7	97	72	38	76	71	76	0	54	93	15	87	103	136	115	141	139	166	178	163	184	167	114	133	125
8	63	77	21	60	23	41	54	0	58	52	52	54	86	71	91	89	117	125	119	135	117	65	83	75
9	61	75	59	57	76	24	93	58	0	92	53	38	62	68	72	70	97	106	122	116	98	50	47	39
10	93	84	34	88	59	73	15	52	92	0	82	98	131	110	135	134	160	173	157	189	162	99	129	121
11	17	31	53	14	70	35	87	52	53	82	0	88	110	113	121	119	145	154	160	164	148	100	97	68
12	99	112	70	74	69	61	103	54	38	98	88	0	41	38	44	44	71	80	91	90	73	20	39	31
13	121	135	103	107	101	83	136	86	62	131	110	41	0	70	53	27	78	88	124	97	66	32	30	33
14	129	142	83	124	54	90	115	71	68	110	113	38	70	0	55	74	75	63	54	69	98	49	68	60
15	132	145	109	128	109	94	141	91	72	135	121	44	53	55	0	47	35	44	91	54	55	30	51	43
16	129	143	106	126	104	91	139	89	70	134	119	44	27	74	47	0	70	81	127	91	40	28	49	41
17	158	170	135	153	130	119	166	117	97	160	145	71	78	75	35	70	0	22	76	26	32	57	77	69
18	167	179	146	162	117	128	178	125	106	173	154	80	88	63	44	81	22	0	63	29	50	66	86	78
19	173	189	133	172	104	144	163	119	122	157	160	91	124	54	91	127	76	63	0	58	107	104	124	116
20	177	189	152	172	123	138	184	135	116	189	164	90	97	69	54	91	26	29	58	0	57	76	97	89
21	157	171	134	154	132	120	167	117	98	162	148	73	66	98	55	40	32	50	107	57	0	57	67	69
22	111	123	72	106	80	73	114	65	50	99	100	20	32	49	30	28	57	66	104	76	57	0	29	21
23	109	121	100	103	109	70	133	83	47	129	97	39	30	68	51	49	77	86	124	97	67	29	0	18
24	100	112	92	95	90	61	125	75	39	121	68	31	33	60	43	41	69	78	116	89	69	21	18	0

5. Riešenie modelového problému metódou STEM

Pre demonštráciu STEM metódy budeme hľadať riešenie trojkriteriálnej okružnej úlohy TSP, ktorej zámerom bude spĺňať tri ciele.

Máme teda zadanú maticu **C** = $\{c_{ij}\}$, ktorá reprezentuje hodnoty pre optimalizáciu prvého cieľa. Jej prvky možno definovať nasledovne:

$$c_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, \text{ak } i \neq j \\ 0, \text{ak } i = j \end{cases}$$

Ďalej matica **E** = $\{e_{ij}\}$ reprezentuje, ktorá reprezentuje hodnoty pre optimalizáciu druhého cieľa. Jej prvky možno definovať nasledovne:

$$e_{ij} = \begin{cases} e_{ij}, \text{ak } i \neq j \\ 0, \text{ak } i = j \end{cases}$$

A maticu **M** = $\{m_{ij}\}$ ktorá reprezentuje hodnoty pre optimalizáciu tretieho cieľa. Jej prvky možno definovať nasledovne:

$$m_{ij} = \begin{cases} m_{ij}, \text{ak } i \neq j \\ 0, \text{ak } i = j \end{cases}$$

Hodnoty matíc vychádzajú zo predchádzajúcej podkapitoly. Postup metódy môžeme demonštrovať na nasledujúcich krokoch. V prvom rade je opäť nutná formulácia viackriteriálneko optimalizačného problému pre riešenie okružnej úlohy TSP.
Definujeme viackriteriálny optimalizačný problém pre riešenie okružnej úlohy

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{c} \min f_1(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \min f_2(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ij} x_{ij} \\ \min f_3(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_{ij} \end{array} \right\}$$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{lll} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, & j = 1, 2, \ldots, n & i \neq j \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, & i = 1, 2, \ldots, n & i \neq j \\ y_i - y_j + n x_{ij} \leq n - 1, & i, j = 2, 3, \ldots, n & i \neq j \\ x_{ij} \in \{0,1\}, & i, j = 1, 2, \ldots, n & \end{array} \right\}$$

a optimalizujeme každý z troch cieľov na vytvorenie pay-off tabuľky.

Tab. 5: Pay-off tabuľka

	$f_1(\bar{x}^i)$	$f_2(\bar{x}^i)$	$f_3(\bar{x}^i)$
$\bar{x}^1$	759	952.4	784
$\bar{x}^2$	835.3	869.1	831
$\bar{x}^3$	763.5	950.4	781

Hodnoty na diagonále predstavujú najlepšie možné dosiahnuteľné hodnoty pre daný cieľ $x_1^* = 759$; $x_2^* = 869{,}1$; $x_3^* = 781$.

V druhom kroku je nutné vyjadriť hodnoty $\prod_i$ a to nasledovne

$$\Pi_1 = \left\{\left|\frac{x_1^* - m_1}{x_1^*}\right| \left[\sum_{j=1}^{n} (c_{ij})^2\right]^{-\frac{1}{2}} \quad pretože\ x_1^* > 0\right\}$$
$$\Pi_2 = \left\{\left|\frac{x_2^* - m_2}{x_2^*}\right| \left[\sum_{j=1}^{n} (e_{ij})^2\right]^{-\frac{1}{2}} \quad pretože\ x_2^* > 0\right\}$$
$$\Pi_3 = \left\{\left|\frac{x_3^* - m_3}{x_3^*}\right| \left[\sum_{j=1}^{n} (m_{ij})^2\right]^{-\frac{1}{2}} \quad pretože\ x_3^* > 0\right\}$$

Po zadaní hodnôt

$$\Pi_1 = \left\{\left|\frac{759 - 863{,}5}{759}\right| [6834471{,}04]^{-\frac{1}{2}} = 3{,}8453e^{-5}\right\}$$
$$\Pi_2 = \left\{\left|\frac{869{,}1 - 952{,}4}{869{,}1}\right| [9173169{,}82]^{-\frac{1}{2}} = 3{,}1646e^{-5}\right\}$$
$$\Pi_3 = \left\{\left|\frac{781 - 831}{781}\right| [5451886{,}00]^{-\frac{1}{2}} = 2{,}7419e^{-5}\right\}$$

Následne dochádza k interakcií rozhodovateľa s analytikom. Je nutné aby rozhodovateľ definoval, ktoré z cieľov požaduje zlepšiť a ktoré možno relaxovať. Doteraz platilo $X^{(1)} = X$, $J = \emptyset$.

Prvky množiny J označujú indexy tých účelových funkcií, ktoré môžu byť relaxované (zhoršené) na nasledujúcej iterácií s cieľom umožniť zlepšenie ostatných účelových funkcií. Od rozhodnutia v tejto iterácií sa odvíjajú výpočty pre ďalšie analytické kroky, zobrazíme si preto dve rozličné požiadavky rozhodovateľa. V prvom prípade budeme uvažovať, že rozhodovateľ bude chcieť relaxovať prvé a druhé kritérium.

Do ďalšej iterácie budeme uvažovať, že rozhodovateľ stanovil množiny nasledovne $X^{(1)} = \{3\}$, $J = \{1,2\}$.
Číslo iterácie je t=1.
Nech t=t+1. Vypočítajú sa minimaxové (Čebyševové) váhy $\lambda_i^{(t)}$, kde

$$\lambda_1^{(1)} = \left\{\frac{3{,}84453e^{-5}}{9{,}7517e^{-5}} \quad pretože\ i \in J\right\}$$
$$\lambda_2^{(1)} = \left\{\frac{3{,}1646e^{-5}}{9{,}7517e^{-5}} \quad pretože\ i \in J\right\}$$
$$\lambda_3^{(1)} = \{0 \quad pretože\ i \notin J\}$$

Ďalší krok predstavuje riešenie váženej minimaxovej úlohy

$$\begin{gathered}\text{Min} \quad \alpha \\ f_i + \frac{\alpha}{\lambda_i} \geq f_i^* \quad , i = 1,2, \dots, k \\ 0 \leq \alpha\end{gathered}$$

Po dosadení hodnôt úlohy

$$\begin{gathered}\text{Min} \quad \alpha \\ -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \frac{1}{\lambda_1}\alpha \geq f_1^* \\ -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ij}x_{ij} + \frac{1}{\lambda_2}\alpha \geq f_2^* \\ -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_{ij} \geq f_3^* \\ x \in \Omega,\ d_\infty \geq 0\end{gathered}$$

Tzn. po úprave

$$\begin{gathered}\text{Min} \quad \alpha \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - 3{,}0816\alpha \leq 759 \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ij}x_{ij} - 3{,}0817\alpha \leq 869{,}1 \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_{ij} \leq 781 \\ s.t. \quad x \in \Omega\end{gathered}$$

$$\Omega = \left\{\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\dots,n \quad i \neq j \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\dots,n \quad i \neq j \\ y_i - y_j + nx_{ij} \leq n-1, \quad i,j = 2,3,\dots,n \quad i \neq j \\ x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i,j = 1,2,\dots,n \end{array}\right\}$$

Pre vyriešenie vyššie formulovaného problému sme využili naprogramovaný kód v optimalizačnom programe GAMS. Kód je analogicky k zápisu v kapitole 3.1 s nasledujúcimi hodnotami v jeho zápise:

```
ohr1(j).. sum(i,x(i,j)$offdiag1(i,j))=e=1;
ohr2(i).. sum(j,x(i,j)$offdiag1(i,j))=e=1;
anti(offdiag2(i,j)).. y(i)-y(j)+n*x(i,j)=l=n-1;
ohr3.. sum((i,j),c(i,j)*x(i,j))-3.0816*d=l=759;
ohr4.. sum((i,j),e(i,j)*x(i,j))-3.0817*d=l=869.1;
ohr5.. sum((i,j),m(i,j)*x(i,j)) =l=781;
```

Začiatočne efektívne riešenie by po vyriešení zadanej úlohy bolo nasledovné
$x^0 =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

$$\alpha = 26{,}3815, \quad F(x^0) = [763{,}5;\ \ 950{,}4;\ \ 781]$$

Za predpokladu, že by získané hodnoty boli uspokojivé pre rozhodovateľa, je výpočet ukončený, v opačnom prípade by sa pokračovalo na ďalší krok, ktorý predstavuje špecifikáciu hodnoty J a špecifikáciu hodnoty $\Delta j, j \in J$, ktoré definujú veľkosť relácie, tzn. prípustného zhoršenia hodnoty j-tej účelovej funkcie.

Vyjadrí sa nasledujúca hodnota a pokračuje sa tretím krokom tzn. definovním množiny *J* označujúcej indexy tých účelových funkcií, ktoré môžu byť relaxované.

$$x^{(2)} = \left\{ x \in X \,\middle|\, \begin{matrix} b^j x \geq x_j\left(x^{(t)}\right) - \Delta j\,, & j \in J \\ b_j x \geq x_j\left(x^{(t)}\right), & i \notin J \end{matrix} \right\}$$

Zvolené kompromisné riešenie by predstavovalo nasledovnú trasu: 1 – 11 – 6 – 9 – 24 – 23 – 13 – 16 – 21 – 17 – 18 – 20 – 19 – 14 – 15 – 22 – 12 – 5 – 8 – 3 – 10 – 7 - 2.

V druhom prípade zobrazenia riešenia viackriteriálnej okružnej úlohy metódou STEM budeme uvažovať, že preferencia rozhodovateľa je na základe stanovenia množín nasledovná $X^{(1)} = \{2\}$, J ={1,3}. Pripúšťame teda zhoršenie prvej a tretej účelovej funkcie. Výpočet by v takomto prípade pokračoval nasledovne

Nech *t*=*t*+1. Vypočítajú sa minimaxové (Čebyševové) váhy $\lambda_i^{(t)}$, kde

$$\lambda_1^{(1)} = \left\{ \frac{3{,}84453e^{-5}}{9{,}7517e^{-5}} \quad \text{pretože } i \in J \right\}$$

$$\lambda_2^{(1)} = \{0 \quad \text{pretože } i \notin J\ \}$$

$$\lambda_3^{(1)} = \left\{ \frac{2{,}74419e^{-5}}{9{,}7517e^{-5}} \quad \text{pretože } i \in J \right\}$$

Ďalší krok predstavuje riešenie váženej minimaxovej úlohy, po dosadení hodnôt a úprave je formulácia úlohy nasledovná

$$
\begin{gathered}
\text{Min} \quad \alpha \\
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} - 3{,}0816\alpha \leq 759 \\
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} x_{ij} \leq 869{,}1 \\
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_{ij} - 3{,}5562\alpha \leq 781 \\
s.t. \quad x \in \Omega
\end{gathered}
$$

$$
\Omega = \left\{
\begin{array}{ll}
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n & i \neq j \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n & i \neq j \\
y_i - y_j + n x_{ij} \leq n - 1, \quad i, j = 2, 3, \ldots, n & i \neq j \\
x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n &
\end{array}
\right\}
$$

V prípade takejto preferencie cieľov by bolo začiatočne efektívne riešenie nasledovné
$x^0 =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$\alpha = 24{,}7599 \qquad F(x^0) = [835{,}3; \quad 869{,}1; \quad 831]$$

Za predpokladu že získané hodnoty sú uspokojivé pre rozhodovateľa je výpočet ukončený, v opačnom prípade by sa pokračovalo na ďalší krok, a výpočet by pokračoval analogicky k postupu uvedenému vyššie.

Zvolené kompromisné riešenie by v tomto prípade predstavovalo nasledovnú trasu: 1 – 4 – 2 – 7 – 10 – 3 – 8 – 5 – 6 – 9 – 12 – 22 – 15 – 14 – 19 – 20 – 18 – 17 – 21 – 16 – 13- 23 – 24 -11 - 1.

6. Záver

Napriek tomu, že aj keď problematika okružných úloh aj viackriteriálneho rozhodovania sú samostatne pomerne známe, riešenie ich kombinácie nie je v literatúre až tak časté. Ešte menej sa stretávame s problematikou viackriteriálnych okružných úloh riešených pomocou interaktívnych iteračných metód. Tento článok sa preto zameriava na spracovanie troch rozličných oblastí (okružné úlohy, viackriteriálne rozhodovanie a interaktívne iteračné úlohy) do jednej problematiky a ponúknutie návodu na jej riešenie.

Pre modelový prípad sa uvažovalo s 24-timi uzlami dopravnej siete, ktoré bolo nutné navštíviť. V reálnom svete tieto uzly môžu predstavovať sklady, predajne, zberné miesta a pod. Pre zadaný prípad sme oproti klasickej úlohe TSP optimalizovali tri ciele. Pre riešenie modelového prípadu bola využívaná softvérová podpora a na dosiahnutie výsledkov bol potrebný optimalizačný systém GAMS. Na základe výstupu z daného programu sme získali riešenie zadanej okružnej úlohy v 24 uzloch, ktoré pri prvom kompromise predstavuje nasledovnú trasu: 1 – 11 – 6 – 9 – 24 – 23 – 13 – 16 – 21 – 17 – 18 – 20 – 19 – 14 – 15 – 22 – 12 – 5 – 8 – 3 – 10 – 7 - 2. A druhé zvolené kompromisné riešenie predstavovalo trasu: 1 – 4 – 2 – 7 – 10 – 3 – 8 – 5 – 6 – 9 – 12 – 22 – 15 – 14 – 19 – 20 – 18 – 17 – 21 – 16 – 13 – 23 – 24 –11 – 1.

Riešenie modelového prípadu v programe GAMS je navrhnuté tak, aby pri zmene hodnôt podľa požiadaviek riešiteľa bolo možné len jednoduchou úpravou v kóde zmeniť výpočet vzhľadom na požadované preferencie. Rovnako vieme použiť pre iné kritéria a požiadavky riešiteľa aj matematickú formuláciu, či kód pre výpočet, je však nutné požite matíc reprezentujúcich hodnoty požadovaného kritéria.

Literatúra

CHARMAZA P. a kol. 1993. Modelovací systém GAMS, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava, 1993

LIU G. P., YANG J. B., WHIDBORNE J. F. 2003. Multiobjective Optimisation and Control, Baldock, Hertfordshire, England, 2003

PEKÁR, J. a kol. 2012. Modelovanie rozmiestňovania recyklačných centier. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, ISBN 978- 80-225-3349-2, 2012

Adresa autorov:

LUCIA MIERESOVÁ, Ing.
Ekonomická univerzita v Bratislave
Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Dolnozemská cesta 1, 1/b, 85235 Bratislava
mieresova.euba@gmail.com

JURAJ PEKÁR, doc., Mgr., PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave
Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Dolnozemská cesta 1, 1/b, 85235 Bratislava
pekar@euba.sk

This paper is supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA, grant no. 1/0245/15 „Transportation planning focused on greenhouse gases emission reduction“.